ДИФФУЗИЯ СВЕТА ЧЕРЕЗ РАССЕИВАЮЩУЮ СРЕДУ БОЛЬШОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ТОЛЩИНЫ*

В настоящей заметке рассматривается вопрос о диффузии света через мутную среду большой оптической толщины τ_0, состоящую из плоскопараллельных слоев. Пусть наружное излучение вступает в среду через одну из ее плоских границ. В результате оно частью будет диффузно отражено обратно, а частично, продиффундировавши через всю среду, выйдет через другую границу. Примем последнюю за начало отсчета оптических глубин. Тогда на ней оптическая глубина $\tau=0$, а на грани, через которую свет входит в среду, $\tau=\tau_0$. При неограниченном возрастании τ_0 поток, прошедший через среду, будет уменьшаться. Однако относительное распределение интенсивности выходящего через грань $\tau=0$ излучения по направлениям будет стремиться к некоторому предельному распределению, не зависящему от направления первоначальных падающих лучей. Увеличивая определенным образом интенсивность падающих извне на грань $\tau=\tau_0$ лучей, мы можем добиться того, чтобы и общий поток прошедшего излучения при возрастании τ_0 оставался постоянным. Тогда и сама интенсивность выходящего излучения в каждом направлении будет стремиться к определенному пределу при $\tau_0 \to \infty$. Эта интенсивность будет функцией угла между выходящим излучением и внешней нормалью. Косинус этого угла обозначим через η, а искомую предельную интенсивность через $u(\eta)$. Наша задача найти эту функцию $u(\eta)$. Эта задача эквивалентна задаче, в которой мутная среда заполняет полупространство, а в бесконечности находятся источники излучения и требуется найти распределение по направлениям лучей, выходящих с границы. Заметим также, что $u(\eta)$ определено лишь с точностью до постоянного множителя.

Для решения этого вопроса мы применим метод прибавления слоя малой толщины $\Delta\tau$, который был использован в наших предыдущих работах [1].

---

* ДАН СССР, **43**, № 3, 106, 1944.

Благодаря очень большой величине τ_0 прибавление $\Delta\tau$ не изменит относительного распределения интенсивностей выходящих лучей по направлениям, хотя и уменьшит (при наличии в среде поглощения наряду с рассеянием) общий выходящий поток. Поэтому после прибавления слоя $\Delta\tau$ распределение будет определяться той же функцией $u(\eta)$, умноженной на множитель $1-k\Delta\tau$, где постоянная k подлежит определению. С другой стороны, мы можем определить выходящую интенсивность, рассчитав все те изменения, которые произойдут вследствие прибавления слоя $\Delta\tau$.

Прежде всего, слой $\Delta\tau$ произведет ослабление лучей, идущих в направлении η в $1-\dfrac{\Delta\tau}{\eta}$ раз. С другой стороны, этот слой рассеивает в направлении η излучение, идущее с прежней границы $\tau=0$. Это рассеянное излучение определяется интегралом

$$\frac{\lambda\Delta\tau}{4\pi\eta}\int\int x(\eta,\ \varphi;\ \eta',\varphi')\,u\ (\eta')\,d\eta'd\varphi',$$

где $x\ (\eta,\ \varphi;\ \eta',\ \varphi')$ есть индикатриса рассеяния. Она является функцией угла между направлениями η, φ и η', φ'. Параметр λ есть отношение коэффициента рассеяния к полному коэффициенту экстинкции.

Кроме того, часть излучения, рассеянного слоем $\Delta\tau$, попадает обратно на прежнюю грань $\tau=0$ и претерпевает диффузное отражение от нее. Интенсивность этого отраженного излучения будет, как легко видеть, определяться через

$$\frac{\lambda\Delta\tau}{4\pi^2}\int\int r\,(\eta,\,\varphi;\,\eta',\,\varphi')\,\frac{d\eta'}{\eta'}\,d\varphi'\int\int x\,(\eta',\,\varphi';\,-\eta'',\,\varphi'')\,d\eta''d\varphi'',$$

где $r\,(\eta,\ \varphi;\ \eta',\ \varphi')$ есть функция, характеризующая диффузное отражение средой бесконечной оптической глубины. Ее точное определение таково: если $I\ (\eta,\ \varphi)$ есть интенсивность излучения, падающего на границу в различных направлениях η, φ, то интенсивность $I_1\,(\eta,\ \varphi)$ диффузно-отраженного света будет равна

$$I_1\,(\eta,\ \varphi)=\frac{1}{\pi}\int\int r\,(\eta,\ \varphi;\ \eta',\ \varphi')\,I\,(\eta',\ \varphi')\,d\eta'd\varphi'.$$

Теперь мы можем приравнять друг к другу два выражения для интенсивности, получившейся после прибавления слоя $\Delta\tau$

$$u(\eta)(1-k\Delta\tau)=u(\eta)\left(1-\frac{\Delta\tau}{\eta}\right)+\frac{\lambda\Delta\tau}{4\pi\eta}\int\int x(\eta,\ \varphi;\ \eta',\ \varphi')\ u\ (\eta')\,d\eta' d\varphi' +$$

$$+\frac{\lambda\Delta\tau}{4\pi^2}\int\int r(\eta,\ \varphi;\ \eta',\ \varphi')\,\frac{d\eta'}{\eta'}\,d\varphi'\int\int x\,(\eta',\ \varphi';-\eta'',\ \varphi'')\,u\,(\eta'')\,d\eta'' d\varphi''$$

или

$$u(\eta)\left(\frac{1}{\eta}-k\right)=\frac{\lambda}{4\pi\eta}\int\int\ x(\eta,\ \varphi;\ \eta',\ \varphi')\ \ u\ (\eta')\,d\eta' d\varphi'+$$

$$+\frac{\lambda}{4\pi^2}\int\int r(\eta,\ \varphi;\ \eta',\ \varphi')\,\frac{d\eta'}{\eta'}\,d\varphi'\int\int x\,(\eta',\ \varphi';-\eta'',\ \varphi'')\,u\,(\eta'')\,d\eta'' d\varphi''. \tag{1}$$

Поскольку u не зависит от азимута, а функции x и r зависят от аргументов φ и φ' только через разность $\varphi-\varphi'$, интегралы

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x\,(\eta,\ \varphi;\ \eta',\ \varphi')\,d\varphi'=p\,(\eta,\ \eta'), \tag{2}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} r\,(\eta,\ \varphi;\ \eta',\ \varphi')\,d\varphi'=\frac{\lambda}{4}\,\Phi\,(\eta,\ \eta') \tag{3}$$

не зависят от азимута φ [2].

В результате (1) перепишется в виде:

$$u(\eta)(1-k\eta)=\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1 p\,(\eta,\ \eta')\ \ u\,(\eta')\,d\eta'+$$

$$+\frac{\lambda^2}{4}\int\limits_0^1\Phi\,(\eta,\ \eta')\,\frac{d\eta'}{\eta'}\int\limits_0^1 p\,(\eta',-\eta'')\,u\,(\eta'')\,d\eta''. \tag{4}$$

Если введем ядро

$$K(\eta,\ \eta')=p\,(\eta,\ \eta')+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1\Phi\,(\eta,\ \eta'')\,p\,(\eta'',-\eta')\,\frac{d\eta''}{\eta''}, \tag{5}$$

то вместо (4) для $u\,(\eta)$ получим интегральное уравнение:

$$u(\eta)(1-k\eta)=\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1 K(\eta,\ \eta')\ \ u\,(\eta')\,d\eta'. \tag{6}$$

Постоянная k должна подбираться так, чтобы при данном λ это уравнение имело отличное от нуля решение.

В предыдущей работе [3] было установлено, что функция $\Phi(\eta, \eta')$ выражается в виде:

$$\Phi(\eta, \eta') = \sum_i (-1)^i x_i \frac{\psi_i(\eta)\,\psi_i(\eta')}{\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta'}}, \tag{7}$$

где $\psi_i(\eta)$ суть вспомогательные функции, определяемые системой уравнений

$$\psi_i(\eta) = P_i(\eta) + \frac{\lambda}{2}\,\eta \sum_j (-1)^{i+j} x_j \psi_j(\eta) \int_0^1 \frac{\psi_j(\eta')\,P_i(\eta')\,d\eta'}{\eta+\eta'}, \tag{8}$$

где x_j — коэффициенты разложения индикатрисы по полиномам Лежандра. С другой стороны, $p(\eta, \eta')$ представляется через полиномы Лежандра в виде:

$$p(\eta, \eta') = \sum_i x_i P_i(\eta)\,P_i(\eta'). \tag{9}$$

Подставляя (9) в (5), находим:

$$K(\eta, \eta') = \sum_i x_i P_i(\eta') \left\{ P_i(\eta) + \frac{\lambda}{2}(-1)^i \int_0^1 \Phi(\eta, \eta'')\,P_i(\eta'')\,\frac{d\eta''}{\eta''} \right\}$$

или, на основании (7) и (8),

$$K(\eta, \eta') = \sum_i x_i P_i(\eta')\,\psi_i(\eta). \tag{10}$$

Подставляя (10) в (6), получаем:

$$u(\eta) = \frac{\lambda}{2} \sum_i \frac{x_i \psi_i(\eta)}{1-k\eta} \int_0 P_i(\eta')\,u(\eta')\,d\eta'.$$

Обозначим

$$\int_0^1 u(\eta)\,P_i(\eta)\,d\eta = c_i.$$

Тогда

$$u(\eta) = \frac{\lambda}{2} \sum \frac{x_i c_i \psi_i(\eta)}{1-k\eta}. \tag{11}$$

Помножая на $P_j(\eta)$ и интегрируя, находим:

$$c_j = \frac{\lambda}{2}\sum_i a_{ij}x_i c_i, \tag{12}$$

где

$$a_{ij} = \int_0^1 \frac{\psi_i(\eta)\, P_j(\eta)\, d\eta}{1 - k\eta}. \tag{13}$$

Таким образом, искомое распределение излучения по направлениям определяется с помощью (11) через те же вспомогательные функции $\psi_i(\eta)$, причем коэффициенты c_i находятся из однородной системы (12).

Для примера рассмотрим два простейших случая.

1. *Сферическая индикатриса рассеяния.* Все x_i равны нулю, кроме $x_0 = 1$. Формула (11) сводится к

$$u(\eta) = \frac{c\psi_0(\eta)}{1 - k\eta}. \tag{14}$$

Таблицы функции $\psi_0(\eta)$ даны автором для различных λ. Вместо (12) имеем в данном случае:

$$1 = \frac{\lambda}{2}\, a_{00}.$$

Согласно (13), это означает:

$$1 = \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{\psi_0(\eta)\, d\eta}{1 - k\eta}. \tag{15}$$

Можно показать [3], что уравнение (14) удовлетворится, если k таково, что

$$\lambda = \frac{1}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k}. \tag{16}$$

2. *Индикатриса рассеяния типа* $x(\eta, \varphi; \eta', \varphi') = 1 + x_1 \cos(\eta, \varphi; \eta', \varphi')$. Рассмотрим случай $\lambda = 1$. При индикатрисе этого типа вообще отличны от нуля $\psi_0(\eta)$ и $\psi_1(\eta)$. Но при $\lambda = 1$ мы имеем $\psi_1(\eta) = 0$, как это показано в работе автора [3]. Поэтому (11) опять сводится к (14), и связь между λ и k остается в виде (16). Но при $\lambda = 1$ имеем $k = 0$. Поэтому

$$u(\eta) = c\psi_0(\eta). \tag{17}$$

Отсюда приходим к следующему замечательному выводу: при чистом рассеянии относительное распределение интенсивностей выходящего излучения по направлениям при всех индикатрисах типа $1+x_1 \cos(\eta, \varphi; \eta', \varphi')$ таково же, как и при сферической индикатрисе.

Этот вывод имеет непосредственно отношение к вопросу о распределении яркости по равномерно облачному небу. Если альбедо земной поверхности достаточно мало, равномерный облачный слой можно принять за чисто рассеивающий слой большой оптической толщины, освещенный лишь с одной стороны прямыми солнечными лучами. При малом альбедо земли излучением, падающим на нижнюю границу облачного слоя, можно пренебречь. Поэтому наблюдаемое с земли распределение интенсивности диффузно-пропущенного света Солнца по направлениям (т. е. в зависимости от зенитного расстояния) должно определяться формулой (11).

Мы не знаем формы индикатрисы рассеяния для облаков. Однако в вопросе о распределении яркости прошедшего излучения по направлениям должна играть основную роль степень ее вытянутости. Между тем степень вытянутости индикатрисы рассеяния характеризуется как раз коэффициентом x_1 ее разложения по полиномам Лежандра. Поэтому, если приближенно представить индикатрису в форме $1+x_1 \cos(\eta, \varphi; \eta', \varphi')$, то можно думать, что неточность в получаемом распределении яркости по облачному небу (связанная с отбрасыванием высших членов разложения по полиномам Лежандра) будет не очень велика.

Учитывая это, а также естественные флуктуации, вызываемые неоднородностью облачного слоя, мы должны ожидать, что яркость равномерно облачного неба при отсутствии снегового покрова и при любой степени вытянутости индикатрисы рассеяния определяется в зависимости от зенитного расстояния формулой (17). Эта формула дает для отношения яркостей зенита и горизонта

$$\psi_0(1)/\psi_0(0)=2{,}9.$$

Е. Н. Юстовой в гор. Елабуге в филиале Ленинградского государственного университета были произведены многочисленные наблюдения над распределением яркости по облачному небу. Среднее из полученных за 14 дней наблюдений, усредненных по азимуту, дает для отношения зенита к горизонту 3,0, что великолепно согласуется с предсказанием теории.

В нашей работе было показано, что формула (17) определяет также яркости по диску Солнца в общем свете. Таким образом, распределение яркости по равномерно облачному небу при отсутствии снегового покрова и распределение яркости по диску Солнца должны совпадать, если пренебречь высшими членами разложения индикатрисы по полиномам Лежандра, начиная с члена второй степени.

Филиал Ленинградского государственного университета, г. Елабуга

Поступило 14.IX 1943

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Амбарцумян, ДАН, **38**, 257, 1943.

2. В. А. Амбарцумян, „Изв. АН СССР", серия географ. и геофизич., № 3, 97, 1942.

3. В. А. Амбарцумян, Астр. журн., **19**, вып. 5, 1942.